1. I) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifiant $f(1)=1$ et $f'(t)=\dfrac{1}{(f(t))^2+t^2}$.
   Montrer que f admet une limite $l \leq 1+\dfrac{\pi}{4}$ en $+\infty$.

   II) Soient A et B non nulles dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $A^2=B^2=0$. Montrer que A et B sont semblables. Est-ce aussi le cas dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$?

Mines-MP O19-131

I) L'expression de f' prouve que f est croissante, donc $\forall t \geq 1,\ f(t) \geq f(1)$ d'où

$$\forall t \geq 1,\ f(t) \ \leq 1+\int_1^t \frac{du}{1+u^2}=1+\arctan t-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+1.$$

f est croissante et majorée donc admet une limite finie l en $+\infty$ et $l \leq \dfrac{\pi}{4}+1$.

II) Soit $u_A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^3)$. $A^2=0 \iff Im(u_A) \subset \ker(u_A)$ donc $rgu_A \leq 3-rgu_A$ et $rgu_A \neq 0$.
On en déduit $1 \leq rgu_A \leq 3/2$ donc $rgu_A=1$ et $\dim\ker u_A=2$.
Soit $x \notin \ker u_A$. $(u_A(x))$ est une famille libre de $\ker u_A$ qu'on peut compléter en une base $(u_A(x),y)$ de $\ker u_A$ et $B=(u_A(x),y,x)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.
La matrice de u_A dans B est $T=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et A est semblable à T ; de même B est semblable à T donc A et B sont semblables.
En dimension 4, on peut avoir $\ker u_A = Imu_A$ (et A est de rang 2) et Imu_B est une droite de $\ker u_B$ (et B est de rang 3) donc A et B ne sont pas toujours semblables.

2. I) Soit f défini sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $f(P)(X)=(2X+1)P(X)+(1-X^2)P'(X)$.
   Déterminer les valeurs et vecteurs propres de f.

   II) Ensemble de définition de $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$. Est-elle continue ? En donner des équivalents aux bords du domaine de définition.

   III) Soit A une matrice complexe telle que la suite (A^p) soit bornée. Montrer que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}A^k=B$ où B est un projecteur sur $\ker(A-I)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(A-I)$.

Mines-MP O19-132

I) On remarque que $f(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$ (le coefficient de X^3 est nul) et que f est linéaire.
La solution générale de (E) : $(2x+1)u+(1-x^2)y'=\lambda y$ sur un intervalle de $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ est $x \mapsto K\exp(\dfrac{3-\lambda}{2}\ln|1-x|+\dfrac{\lambda+1}{2}\ln|1+x|)$ et si λ est une valeur propre de f et P un vecteur propre associé, alors la restriction de la fonction polynômiale P à $]-1,1[$ par exemple est une solution non nulle de (E) sur cet intervalle ; il est donc nécessaire que $\dfrac{3-\lambda}{2} \in \mathbb{N}$ et $\dfrac{\lambda+1}{2} \in \mathbb{N}$ donc $\lambda+1=2p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $\dfrac{3-\lambda}{2}=2-p \geq 0$ donc $p=0,1$ ou 2 et $\lambda=-1,1$ ou 3.
Réciproquement $P=(1-X)^2$ vérifie $f(P)=-P$, $P=(1-X)(1+X)$ vérifie $f(P)=P$ et $P=(1+X)^2$ vérifie $f(P)=3P$ donc f admet 3 valeurs propres distinctes $-1,1,3$ et on a trouvé une base de chaque sous-espace propre.

II) Soit $u_n = x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$.
$f(x)$ n'existe pas si $x \leq 1$.
f est définie et continue sur $]1,+\infty[$. En effet :
– Pour tout n, u_n est continue sur $]1,+\infty[$.
– Soit $[a,b]$ un segment de $]1,+\infty[$. $\|u_n\|_\infty^{[a,b]}=\dfrac{1}{n^a}$ est le terme général d'une série convergente, donc $\sum u_n$ converge normalement sur $[a,b]$ (CVN locale)
Etude en 1^+ ; on encadre le terme général par des intégrales :
Soit $x>1$.

$$\forall n \geq 2, u_n(x) \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x} \text{ et } \forall n \geq 1, u_n(x) \geq \int_n^{n+1}\frac{dt}{t^x} \text{ et } t \mapsto \frac{1}{t^x} \in L^1([1,+\infty[) \text{ donc}$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x} \leq f(x) \leq 1+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x} \text{ ie } \frac{1}{x-1} \leq f(x) \leq 1+\frac{1}{x-1} \text{ d'où } f(x) \underset{x\to1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

Etude en $+\infty$; on utilise le thm de la double limite :
– $\displaystyle\lim_{+\infty} u_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $\displaystyle\lim_{+\infty} u_n = 0$,

– $\sum u_n$ *converge normalement sur un voisinage de* $+\infty$*. En effet,* $\|u_n\|_\infty^{[2,+\infty[} = \dfrac{1}{n^2}$*,*
d'où $\lim\limits_{+\infty} f = 1$*.*

III) Prouvons d'abord que $E_1 = \ker(A-I)$ *et* $E_2 = Im(A-I)$ *sont supplémentaires :*
Soit $x \in E_1 \cap E_2$*.* $Ax = x$ *et* $\exists y,\ x = Ay - y$*.*
$Ay = y + x$, $A^2y = y + 2x$ *et par récurrence immédiate* $\forall p \geq 1,\ A^py = y + px$ *ou* $\forall p \geq 1,\ x = \dfrac{1}{p}(A^py - y)$*.*
On peut choisir sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ *des normes* N, N' *telles que* $N'(Mz) \leq N(M)N'(z)$ *pour tout* $(M,z) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$*.*
Alors $\forall p \geq 1,\ N'(x) \leq \dfrac{1}{p}(K+1)N'(y)$ *donc* $N'(x) = 0$ *et* $x = 0$*.*
Soit $u_p = \dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^k$*. Il suffit d'étudier* $\lim\limits_{p\to+\infty} u_p(x)$ *pour* $x \in E_1$ *et pour* $x \in E_2$*.*
Soit $x \in E_1$*.* $\forall p,\ u_p(x) = x$ *donc* $\lim\limits_{p\to+\infty} u_p(x) = x$*.*
Soit $x = Ay - y \in E_2$ *;* $\forall k,\ A^kx = A^{k+1}y - A^ky$ *donc* $\forall p,\ N'(u_p(x)) = \dfrac{1}{p}N'(A^py - y) \leq \dfrac{1}{p}(K+1)N'(y)$
donc $\lim\limits_{p\to+\infty} u_p(x) = 0$*.*

3. I) Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation $x^2y" + xy' + (x^2-1)y = 0$.
   II) Trouver f, endomorphisme non nul de E, euclidien de dimension 4, vérifiant : $f^4 + f = 0, \mathrm{tr} f = 0, f^* = -f^2$.

Mines-MP O19-133

I) Soit $y = x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ *et* R *le rayon de convergence.*

$$\text{(1) :}(y \text{ est solution sur }]-R,R[) \iff \begin{cases} -a_0 = 0 \\ a_1 - a_1 = 0 \\ \forall p \geq 2,\ p(p-1)a_p + pa_p + a_{p-2} - a_p = 0 \end{cases}$$

donc (1) $\iff \forall k \in \mathbb{N},\ a_{2k} = 0$ *et* $a_{2k+1} = \dfrac{(-1)^ka_1}{4^k(k!)^2(k+1)}$*.*
$a_{2k+1}x^{2k+1} = o(\dfrac{(x^2)^k}{k!})$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *donc* $R = +\infty$ *et on a trouvé une infinité de solutions sur* $\mathbb{R}$ *de la forme* $x \mapsto a_1 \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^kx^{2k+1}}{4^k(k!)^2(k+1)}$*.*

II) $X^4 - X$ *est un polynôme annulateur de* f *donc* $sp(f) \subset \{0, -1, -j, -j^2\}$*, ie* $0, -1, -j, -j^2$ *sont valeurs propres de* f *d'ordre* $k_0, k_{-1}, k_{-j}, k_{-j^2}$ *où* $k_\lambda \in [\![0, 4]\!]$ *et* $k_{-j} = k_{-j^2}$ *puisque l'espace est réel et* $k_0 + k_{-1} + 2k_{-j} = 4$*.*
De plus $trf = 0 = -k_{-1} + (-j - j^2)k_{-j} = -k_{-1} + k_{-j}$ *donc* $k_0 + 3k_{-1} = 4$ *et* $k_{-j} = k_{-1}$*.*
1er cas : $k_0 = k_{-1} = 1$ *et* f *a 4 valeurs propres distinctes et pour matrice* $D = diag(0, -1, -j, -j^2)$ *dans une base convenable, or* $D^2 \neq D^*$ *donc ce cas est à exclure.*
2ème cas : $k_0 = 4$ *et* f *admet* 0 *pour unique valeur propre. Alors* $\chi_f = X^4$ *donc* $f^4 = 0$ *(thm de Cayley-Hamilton) et* $f = 0$ *donc ce cas est à exclure.*
Le problème n'a donc aucune solution.

4. I) Soit (a_n) une suite décroissante de réels positifs. Pour $x \in [0,1]$ et $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = a_nx^n(1-x)$.
   Montrer la convergence simple de $\sum u_n$ sur $[0,1]$.
   Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.
   Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si (a_n) converge vers 0.
   II) Montrer que si n est impair, $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tM = -M$ n'est pas inversible. Etudier le cas n pair.

Mines-MP O19-134

I) Si $x \in [0,1[$*, alors* $|u_n(x)| \leq a_0x^n$ *et* $u_n(0) = 0$ *donc* $\sum u_n$ *converge simplement sur* $[0,1]$*.*
$\|u_n\|_\infty^{[0,1]} = u_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = a_n(1 + 1/n)^{-n}\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_n}{ne}$ *donc* $\sum u_n$ *converge normalement sur* $[0,1]$ *ssi* $\sum \dfrac{a_n}{n}$ *est une série numérique convergente.*
(a_n) *est décroissante minorée par* 0 *donc admet une limite* $l \geq 0$*.*
$\forall (x,n),\ R_n(x) = \sum\limits_{k>n} u_k(x) \geq \sum\limits_{k>n} lx^k(1-x)$ *(*l *minore les* $a_k, k \geq n+1$*) donc* $R_n(x) \geq \dfrac{x^{n+1}}{1-x}(1-x) = lx^{n+1}$

donc $\|R_n\|_\infty^{[0,1]} \geq l$ *: pour que* $\sum u_n$ *converge uniformément sur* $[0,1]$*, il est nécessaire que* $l = 0$.
De même, $\forall (x,n)$, $R_n(x) = \sum_{k>n} u_k(x) \leq \sum_{k>n} a_{n+1} x^k (1-x)$ *(*a_{n+1} *majore les* $a_k, k \geq n+1$*) donc* $\|R_n\|_\infty^{[0,1]} \leq a_{n+1}$ *:* $\lim a_{n+1} = l = 0$ *est une condition suffisante pour que* $\sum u_n$ *converge uniformément sur* $[0,1]$.

II) *Si* n *est impair, alors* $\det M = \det({}^t M) = -\det M$ *donc* M *n'est pas inversible.*
Si n *est pair,* M *peut être non inversible (ex :* $M = 0$*) ou inversible (ex :* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$*).*

5. I) Pour $(a,\theta) \in \mathbb{R}^2$, on pose $Q(a,\theta) = \frac{1}{2} \ln(1 + a^2 - 2a\cos\theta)$.
Etudier l'existence de $I(a) = \int_0^{2\pi} Q(a,\theta)\ \mathrm{d}\theta$ pour $a \in \mathbb{R}$.
On suppose que $|a| \neq 1$; trouver une relation entre $I(a)$ et $I(a^2)$.
On suppose que $|a| < 1$; calculer $I(a)$.
On suppose que $|a| > 1$; trouver une relation entre $I(a)$ et $I(1/a)$ et en déduire la valeur de $I(a)$.

II) Soient E un espace vectoriel de dimension n, $(f_1, ..., f_p)$ des endomorphismes de E non nuls tels que $f_i \circ f_j = \delta_{ij} f_i$. Montrer que $p \leq n$.
Dans le cas où $p = n$, montrer que $\sum_{i=1}^n f_i = Id$.

Mines-MP O19-135

I) $1 + a^2 - 2a\cos\theta = (a - e^{i\theta})(a - e^{-i\theta})$ *donc si* $|a| \neq 1$*, alors* $Q(a,.)$ *est continue sur* $[0, 2\pi]$ *donc* $I(a)$ *existe.*
$Q(1,\theta) = \frac{1}{2}\ln(4\sin^2\frac{\theta}{2}) = \ln 2 + \ln\sin\frac{\theta}{2}$ *et* $g : \theta \mapsto -\ln\sin\frac{\theta}{2}$ *est une fonction à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$ *continue sur* $]0, 2\pi[$ *;* $g(\theta) \underset{\theta\to 0}{\sim} -\ln\theta$ *et* $g(\theta) \underset{\theta\to 2\pi}{\sim} -\ln(2\pi - \theta)$ *donc* $I(1)$ *existe.*
Pour $a = -1$, $Q(-1,\pi)$ *n'existe pas donc* $Q(-1,.)$ *n'est pas définie sur* $]0, 2\pi[$ *et* $I(-1)$ *n'existe pas.*
Soit $a \in]-1, 1[$.
$Q(a^2,\theta) = \frac{1}{2}\ln(a^4 + 2a^2 + 1 - 4a^2\cos^2\theta/2)$ *donc* $I(a^2) = A + B$ *où* $A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\ln(a^2 + 1 + 2a\cos\theta/2)\ d\theta$ *et* $B = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\ln(a^2 + 1 - 2a\cos\theta/2)\ d\theta$.
$Q(a,.)$ *est paire et* $2\pi-$*périodique donc* $I(a) = 2\int_0^\pi Q(a,.)$.
$A = -\int_\pi^0 \ln(a^2 + 1 + 2a\cos\alpha)\ d\alpha = 2I(a)$ $(\theta = 2\pi - 2\alpha)$.
$B = \int_0^\pi \ln(a^2 + 1 + 2a\cos\alpha)\ d\alpha = 2I(a)$ $(\theta = 2\alpha)$.
On a donc $I(a^2) = 4I(a)$.
Par récurrence immédiate, $\forall k \in \mathbb{N}$, $I(a) = 4^{-k} I(a^{2^k})$ *et* $\forall k \geq 0$, $|a^{2^k}| \leq |a|$ *; prouvons que* I *est bornée sur* $[-|a|, |a|]$ *; on pourra en déduire que* $I(a) = 0$.
Soit $b \in [-|a|, |a|]$ *;* $\forall\theta$, $b^2 + 1 - 2b\cos\theta \in [(1-|b|)^2, (1+|b|)^2] \subset [(1-|a|)^2, (1+|a|)^2]$ *et* $|\ln(1-|a|)| = \ln\frac{1}{1-|a|} \geq \ln(1+|a|)$ *donc* $|I(b)| \leq 2\pi|\ln(1-|a|)|$*, d'où le résultat.*
Soit $|a| > 1$.
$Q(1/a,\theta) = \frac{1}{2}\ln(\frac{a^2 + 1 - 2a\cos\theta}{a^2}) = Q(a,\theta) - \ln|a|$ *donc* $I(a) = I(1/a) + 2\pi\ln|a| = 2\pi\ln|a|$.

II) *Les* f_i *sont des projecteurs. Prouvons que* $+_{i=1}^p Imf_i$ *est une somme directe :*
Soit $0 = x = \sum_{i=1}^p x_i$ *avec* $\forall i$, $x_i = f_i(y_i) \in Imf_i$.
$\forall j \in [\![1, p]\!]$, $f_j(x) = 0 = \sum_{i=1}^p f_j \circ f_i(y_i) = f_j \circ f_j(y_j) = x_j$*, d'où le résultat.*
$\oplus_{i=1}^p Imf_i$ *est donc un sous-espace de* E *de dimension* $\sum_{i=1}^p rgf_i \geq p$ *donc* $p \leq n$.
Si $p = n$*, alors* $\sum_{i=1}^n (rgf_i - 1) = 0$ *donc les* Imf_i *sont* n *droites supplémentaires et les* f_i *sont les*

projecteurs associés à cette décomposition, donc $\sum_{i=1}^{n} f_i = Id$.

6. I) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On note $D(k)$ la dimension du noyau de u^k.
Enoncer tous les résultats connus sur la suite $(D(k))$. Montrer qu'elle est concave au sens discret.

Mines-MP O19-136

I) $(D(k))$ *est une suite croissante.*
Soit $a_k = D(k+1) - D(k)$. *Prouvons que* (a_k) *est décroissante :*
Im(u^k) *est stable par u ; soit v l'endomorphisme de Im*(u^k) *induit par u.*
D'après le thm du rang, $\dim Im(u^k) = rgv + \dim\ker v$; $rgv = \dim E - D(k+1)$, $\dim Im(u^k) = \dim E - D(k)$ *et* $\ker v = \ker u \cap Im(u^k)$ *donc* $a_k = \dim\ker v$ *et* $(Im(u^k)))$ *est décroissante pour l'inclusion, donc* (a_k) *est une suite décroissante d'entiers.*
En particulier, si $a_p = 0$ *(ie* $\ker u^p = \ker u^{p+1}$*), alors* $\forall k \geq p$, $a_k = 0$ *(ie* $\forall k \geq p$, $\ker u^k = \ker u^p$*).*

7. I) Soit f croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer que, s'il existe $x \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^k(x) = x$, alors x est un point fixe pour f.
Montrer que f admet un point fixe.

II) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = A^2$. Montrer que $A^3 = I_n$ et que A est orthogonale.
Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Montrer que le noyau de $f^2 + f + I_n$ est de dimension paire et en déduire la forme de f.

Mines-MP O19-137

I) Soit x *un point fixe de* f^k *et* $y = f(x)$.
Supposons $y > x$: $x < f(x)$ *et f est croissante donc* $f(x) \leq f^2(x)$, $f^2(x) \leq f^3(x)$, ..., $f^{k-1}(x) \leq f^k(x)$ *donc* $x < f^k(x)$ *ce qui est absurde.*
Supposons $y < x$: *de même,* $f^k(x) > x$ *ce qui est absurde.*
Conclusion : $y = x = f(x)$, x *est point fixe de* f.
Prouvons maintenant que f admet un point fixe :
Soit $A = \{x \in [0,1]/f(x) \geq x\}$. A *est une partie de* $\mathbb{R}$ *non vide (*$0 \in A$*) et majorée (par* 1*) donc elle admet une borne supérieure* M. *Prouvons que* M *est un point fixe de* f.
Supposons que $f(M) < M$: *Il existe* $t \in A$ *tel que* $f(M) < t \leq M$ *et* $f(t) \leq f(M)$ *(car f est croissante) et* $f(t) \geq t$ *(car* $t \in A$*) ce qui est absurde.*
Supposons que $f(M) > M$: $f(f(M)) \geq f(M)$ *(car f est croissante) donc* $f(M) \in A$ *ce qui est absurde.*
On a donc bien $f(M) = M$.

II) $A = ({}^tA)^2$ *donc* $A = A^4$ *soit* $A(A^3 - Id) = 0$ *; de plus A est inversible, donc* $A^3 = Id$.
$A^3 = Id$ *prouve que* $A^2 = A^{-1}(={}^t A)$ *donc A est orthogonale.*
$sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{1, j, j^2\}$ *et A est réelle donc les sous-espaces propres (dans* $\mathbb{C}^n$*) associés à* j, j^2 *sont de même dimension p et conjugués, et* $\ker(A^2 + A + I)$ *(dans* $\mathbb{C}^n$*) est de dimension* $2p$ *; mais si* $(e_1, ..., e_p)$ *est une base (dans* $\mathbb{C}^n$*) de* $\ker(A - jI)$, *et donc* $(\overline{e_1}, ..., \overline{e_p})$ *une base (dans* $\mathbb{C}^n$*) de* $\ker(A - j^2I)$, *alors* $(\frac{e_1 + \overline{e_1}}{2}, ..., \frac{e_1 - \overline{e_1}}{2i}, ...)$ *est une famille libre réelle de* $\ker(A^2 + A + I)$ *donc le sous-espace réel* $\ker(f^2 + f + Id)$ *est de dimension* $2p$.

8. I) Dans le plan affine euclidien usuel, on donne les points $A(1,1), B(2,2), C(-3,3)$ et $D(-4,4)$.
Donner, dans la base canonique, la matrice de la rotation vectorielle qui transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$.
En déduire l'angle et le centrede la rotation qui transforme A en C et B en D.

II) Etudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions définies par $f_n(x) = (\cos x)^n \sin x$.
Même question pour la série de fonctions $\sum f_n$.

Mines-MP O19-138

I) $\overrightarrow{AB} = (1,1)$ *et* $\overrightarrow{CD} = (-1,1)$ *donc* $\overrightarrow{CD}$ *est l'image de* $\overrightarrow{AB}$ *par la rotation de matrice* $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *(rotation d'angle* $\pi/2$*).*
La médiatrice de (A, C) *est la droite d'équation* $-4(x+1) + 2(y-2) = 0$ *et la médiatrice de* (B, D) *est la droite d'équation* $-6(x+1) + 2(y-3) = 0$ *donc leur point d'intersection* $\Omega = (-2, 0)$ *est le centre de la rotation cherchée.*

II) Etude de la suite (f_n) :
(f_n) *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers* 0.
Pour tout n, $|f_n|$ *est* $\pi-$*périodique et* $f_n' = x \mapsto (\cos^{n-1} x)((n+1)\cos^2 x - n)$ *donc*

$\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = f_n(\arccos\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n/2}\sqrt{\dfrac{1}{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{en}}$, d'où la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
Etude de la série $\sum f_n$:
$\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ de somme $S = x \mapsto \dfrac{\sin x}{1-\cos x} = cotan(x/2)$ si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $x \mapsto 0$ sinon.
S n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall n$, $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.
La convergence est uniforme car normale sur tout segment de $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$; en effet, si $[a, 2\pi-a] \subset]0, 2\pi[$, alors, pour tout n tel que $\arccos\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \leq a$ (ie $n \geq cotan^2 a$), $\|f_n\|_\infty^{[a,2\pi-a]} = f_n(a)$ qui est le terme général d'une série (géométrique) convergente.

9. I) Soient f définie sur $[a,b]$, $\sigma = (x_0, ..., x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ et $V(f,\sigma) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1} - f(x_k)|$.
On dit que f est à variation bornée si $V(f,\sigma)$ est majoré indépendamment de σ. On note alors $V_{[a,b]}(f) = \sup V(f,\sigma)$.
Montrer, à l'aide de $g(x) = x\cos\dfrac{\pi}{x}$, qu'une fonction continue n'est pas généralement à variation bornée.
Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, elle est à variation bornée et que $V_{[a,b]}(f) = \displaystyle\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x$.
Montrer qu'une fonction monotone est à variation bornée et en déduire que la différence de deux fonctions croissantes est à variation bornée.
Montrer que l'application qui à x associe $V_{[a,x]}(f)$ est croissante.

II) Donner une CNS pour qu'une matrice réelle orthogonale soit diagonalisable.

Mines-MP O19-139

I) – *g peut être prolongée en une fonction continue sur $[0,1]$ par $g(0) = 0$. g désigne désormais cette fonction.*
Soit $\sigma = (x_0, x_1 = \dfrac{1}{2p}..., x_{2p} = 1)$ la subdivision de $[0,1]$ définie par $x_0 = 0$ et $x_i = \dfrac{1}{2p+1-i}$ pour $i = 1..2p$.
$V(g,\sigma) = |g(0)-g(x_1)|+...+|g(x_{2p-1})-g(x_{2p})| = \dfrac{1}{2p}+|\dfrac{-1}{2p-1}-\dfrac{1}{2p}|+|\dfrac{1}{2p-2}-\dfrac{-1}{2p-1}|+...+|\dfrac{-1}{1}-\dfrac{1}{2}|$.
$V(g,\sigma) = \dfrac{1}{2p} + \displaystyle\sum_{i=1}^{2p-1}(\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i+1}) = 2\sum_{i=1}^{2p}\dfrac{1}{i} - 1 \to_{p\to+\infty} +\infty$ donc g n'est pas à variation bornée (AVB) bien que continue sur $[0,1]$.

– *Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$.*
Pour toute subdivision σ, $V(f,\sigma) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f'| = \int_a^b |f'|$ donc f est AVB et (1) : $V_{[a,b]}(f) \leq \displaystyle\int_a^b |f'|$. Il reste à prouver que (1) est une égalité.
Soit $\varepsilon > 0$. $|f'|$ est continue sur le compact $[a,b]$ donc uniformément continue, ie :
$\exists \eta > 0$, $\forall (t_1,t_2) \in [a,b]^2$, $|t_1 - t_2| \leq \eta \Rightarrow ||f'(t_1)| - |f'(t_2)|| \leq \varepsilon$.
Soit un tel η et σ ue subdivision de pas η.
Pour tout $k = 1..n-1$, $|f(x_{k+1} - f(x_k)| = (x_{k+1} - x_k)|f'(c_k)|$ où $c_k \in]x_k, x_{k+1}[$ d'après l'égalité des accroissements finis pour la fonction $f \in \mathcal{C}^1([x_k, x_{k+1}])$ donc
$$\left||f(x_{k+1} - f(x_k)| - \int_{x_k}^{x_{k+1}}|f'|\right| = \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f'(c_k)| - \int_{x_k}^{x_{k+1}}|f'|\right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} ||f'(c_k)| - |f'(t)||\ dt \leq \varepsilon(x_{k+1} - x_k).$$
En sommant : $\left|V(f,\sigma) - \displaystyle\int_a^b |f'|\right| \leq \varepsilon(b-a)$.
On a donc prouvé que $\forall \varepsilon' > 0, \exists \sigma$, $V(f,\sigma) \geq \displaystyle\int_a^b |f'| - \varepsilon'$ d'où $V_{[a,b]}(f) = \displaystyle\int_a^b |f'|$.

– *Soit f une fonction monotone croissante. Pour tout σ, $V(f,\sigma) = f(b) - f(a)$ donc f est AVB (et $V_{[a,b]}(f) = f(b) - f(a)$).*
L'ensemble des fonctions AVB sur $[a,b]$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel : en effet, si f et g sont AVB et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour tout σ, on a $V(\lambda f + g, \sigma) \leq |\lambda| V(f,\sigma) + V(g,\sigma) \leq |\lambda| V_{[a,b]}(f) + V_{[a,b]}(g)$ donc $\lambda f + g$ est AVB. On en déduit que toute fonction monotone décroissante est AVB ainsi que

toute différence de deux fonctions croissantes.

– *On suppose que f est AVB sur $[a,b]$ et soit $x \in [a,b]$.*
Pour toute permutation $\sigma = (a = x_0, ..., x = x_n)$ de $[a,x]$, $\sigma' = (a = x_0, ..., x_n = x, x_{n+1} = b)$ est une subdivision de $[a,b]$ donc (1) : $V(f,\sigma) \leq V_{[a,b]}(f)$ ce qui prouve que f est AVB sur $[a,x]$.
Il existe donc une fonction $g = x \mapsto V_{[a,x]}(f)$ définie sur $[a,b]$.
En reprenant ce qui précède en remplaçant b par un $y > x$, le résultat (1) devient $V(f,\sigma) \leq V_{[a,y]}(f)$ pour toute permutation $\sigma = (a = x_0, ..., x = x_n)$ de $[a,x]$, donc $V_{[a,x]}(f) \leq V_{[a,y]}(f)$ ce qui prouve que g est croissante.
Soit $h = g - f$.
Prouvons que h est croissante.
Soit $a \leq x < y \leq b$. $h(y) - h(x) = (g(y) - g(x)) - (f(y) - f(x))$.
Soit $\varepsilon > 0$ et σ une subdivision de $[a,x]$ telle que $V(f,\sigma) \geq g(x) - \varepsilon$. Soit σ' la subdivision de $[a,y]$ obtenue en complétant σ par le point y.
$V(f,\sigma') = V(f,\sigma) + |f(y) - f(x)| \geq g(x) + |f(y) - f(x)| - \varepsilon$ donc $g(y) \geq g(x) + |f(y) - f(x)| - \varepsilon$.
$h(y) - h(x) \geq |f(y) - f(x)| - (f(y) - f(x)) - \varepsilon \geq -\varepsilon$, et ceci pour tout $\varepsilon > 0$, donc $h(y) \geq h(x)$.
On a donc prouvé que toute fonction AVB est la différence de deux fonctions croissantes.

II) Prouvons que A est orthogonale et diagonalisable ssi c'est la matrice d'une symétrie orthogonale.
Soit A orthogonale et diagonalisable.
Son spectre complexe est inclus dans $\{z/|z| = 1\}$ donc il faut que ses seules valeurs propres soient dans $\{-1,1\}$ et que son polynôme minimal soit scindé à racines simples, donc que $(X+1)(X-1)$ soit un multiple de son polynôme minimal. On a alors $A^2 = I$ donc A est une matrice de symétrie.
Soit x tel que $Ax = x$ et y tel que $Ay = -y$. ${}^txy = {}^t(Ax)(-Ay) = -{}^tx({}^tAA)y = -{}^txy$ donc $x \perp y$ et il s'agit d'une symétrie orthogonale.
Soit A une matrice de symétrie orthogonale. Elle est diagonalisable ($X^2 - 1$ est annulateur) et orthogonale ($\forall x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2, {}^t(Ax)(Ay) = {}^t(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) = {}^tx_1y_1 + {}^tx_2y_2 = {}^txy$ en utilisant la décomposition $E = \ker(A - I) \overset{\perp}{\oplus} \ker(A + I)$).

10. I) On donne $A = X^n - X,\ B = X^n - 1$; montrer que l'application qui à tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B est un endomorphisme dont on déterminera le noyau, l'image et les éléments propres.

II) Soit f une fonction continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer l'existence d'une fonction g continue telle que $g(x+1) - g(x) = f(x)$.

Mines-MP O19-140

I) Soit f cette application et $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
$degB = n$ donc f est bien une application de E dans E.
Soit $(P_1, P_2, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{C}$.
$AP_1 = BQ_{P_1} + f(P_1)$ et $AP_2 = BQ_{P_2} + f(P_2)$ donc $A(\lambda P_1 + P_2) = B(\lambda Q_{P_1} + Q_{P_2}) + (\lambda f(P_1) + f(P_2))$ et $deg(\lambda f(P_1) + f(P_2)) < degB$ donc $\lambda f(P_1) + f(P_2) = f(\lambda P_1 + P_2)$ et f est linéaire.
Recherche des valeurs propres de f :
((1) : $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de f) $\iff \exists P \neq 0,\ B|(AP - \lambda P)$.
B est scindé à racines simples $\exp(2ik\pi/n), k = 0..n-1$ donc
(1) $\iff \exists P \neq 0, \forall k \in [\![0, n-1]\!], ((A - \lambda)P)(\exp(2ik\pi/n)) = 0$.
Si $P \in E$ s'annule en n points distincts, alors $P = 0$, donc
(1) $\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], (A - \lambda)(\exp(2ik\pi/n)) = 1 - exp(2ik\pi/n) - \lambda = 0$, et le polynôme $P_k = \displaystyle\prod_{j \neq k \text{ et } 0 \leq j \leq n-1} (X - exp(2ij\pi/n))$ est une solution non nulle dans E de $f(P) = \lambda_k P$.
f a donc n valeurs propres simples $\lambda_k = 1 - exp(2ik\pi/n)$ et les espaces propres associés sont les droites engendrées par les P_k En particulier, pour $k = 0$, $\lambda_0 = 0$, on trouve le noyau, engendré par $P_0 = \dfrac{X^n - 1}{X - 1} = X^{n-1} + ... + X + 1$.
$\oplus_{k=1}^{n-1} E_{\lambda_k} \subset Imf$ et Imf est un sous-espace de dimension $n-1$ donc $Imf = \oplus_{k=1}^{n-1} E_{\lambda_k}$.
$\forall k \neq 0$, $P_k(1) = 0$ donc $\oplus_{k=1}^{n-1} E_{\lambda_k}$ est un sous-espace de $(X-1)\mathbb{C}_{n-2}[X]$, qui est aussi un sous-espace de dimension $n-1$.
Conclusion : $Imf = (X-1)\mathbb{C}_{n-2}[X]$.

II) f est décroissante donc admet une limite l en $+\infty$ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. De plus $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ donc $l \neq 0$ est impossible.
Analyse : Soit g une fonction continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x+1) - g(x) = f(x)$.
$\forall (x,p) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} (g(x+1+n) - g(x+n) = g(x+1+p) - g(x) = \sum_{n=0}^{p} f(x+n)$.
$t \mapsto f(x+t)$ est intégrable décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc la série $\sum f(x+n)$ est convergente ; soit

$S(x)$ sa somme.
Nécessairement, la suite $(g(x+q))_{q\in\mathbb{N}}$ doit avoir une limite $L(x)$ et il faut que $g(x)=L(x)-S(x)$.
Synthèse : Soit $g=-S$ (ie choisissons $L=0$).
Prouvons que g (ou S) est continue sur $\mathbb{R}_+$:
Soit $u_n(x)=f(x+n)$.
$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$, et $\|u_n\|_\infty^{[0,+\infty[}=f(n)$ est le TG d'une série convergente, d'où la continuité de S.
Prouvons que $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $g(x+1)-g(x)=f(x)$:
Soit $x\in\mathbb{R}_+$. $g(x+1)-g(x)=S(x)-S(x+1)=\lim\limits_{p\to+\infty}(f(x)-f(x+p+1)=f(x)$.
g est donc une solution du problème. Elle n'est pas unique, puisque toute fonction $g+cste$ est solution.

11. I) Soient $a>0, b>0$. Etudier la suite (U_n) définie par $U_0=a$ et $U_{n+1}=\sqrt{U_n}+b$.
    II) Soit A une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est triangulaire inférieure si et seulement si, pour tout $k\geq 2$, A^k est triangulaire inférieure.
    Donner un exemple de matrice qui ne soit ni inversible ni triangulaire inférieure, mais dont toutes les puissances supérieures à 2 soit triangulaires inférieures.

Mines-MP O19-141

I) Soit $f=t\mapsto\sqrt{t}+b$.
f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $f(t)\geq t \iff t-\sqrt{t}-b\leq 0 \iff t\in[0,l]$ où $l=\dfrac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$.
$f([0,l])\subset[0,l]$ donc, si $a\in[0,l]$, alors $\forall n, U_n\in[0,l]$ et $\forall n, U_{n+1}\geq U_n$: (U_n) est une suite croissante majorée (par l) donc elle est convergente et sa limite est un point fixe de f (f est continue sur $\mathbb{R}_+$) donc cette limite est l.
De même, $f([l,+\infty[)\subset[l,+\infty[$ donc, si $a\in[l,+\infty[$, alors (U_n) est décroissante minorée par l, donc convergente et sa limite est l.

II) Lemme : Si M et N sont deux matrices carrées triangulaires supérieures, alors MN est triangulaire supérieure.
En passant aux transposées, le même énoncé est vrai pour les matrices triangulaires inférieures.
En effet, si M et N sont triangulaires supérieures, alors $\forall p\in[\![1,n]\!]$, E_p est stable par M et N, en notant $E_p=Vect(e_1,...,e_p)$, e_i étant le $i-$ème vecteur de la base usuelle de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
Pour tout $p\in[\![1,n]\!]$, E_p est donc stable par MN donc MN est triangulaire supérieure. D'où le lemme.
Supposons A triangulaire inférieure.
Alors toutes les matrices $A^k, k\geq 1($ ou $0)$ sont triangulaires inférieures.
Supposons que pour tout $k\geq 2$, A^k soit triangulaire inférieure et que A soit inversible.
Soit $\chi_A(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^n a_kX^k$ le polynôme caractéristique de A.
$\chi_A(A)=0$ (thm de Cayley-Hamilton) donc $A\chi_A(A)=a_0A+\displaystyle\sum_{k=1}^n a_kA^{k+1}=0$.
$a_0\neq 0$ (car A est inversible) donc $A=\dfrac{-1}{a_0}\displaystyle\sum_{k=1}^n a_kA^{k+1}$ est triangulaire inférieure.
$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ n'est pas triangulaire inférieure bien que $\forall k\geq 2$, $A^k=0$ soit triangulaire inférieure.

12. I) On définit sur $[0,1]$ la suite de fonctions (P_n) par :
    $P_0=0$, $P_{n+1}(x)=P_n(x)+\dfrac{1}{2}\left(x-(P_n(x))^2\right)$.
    Etudier les convergences simple et uniforme de (P_n).
    II) Soit A et B réelles, carrées d'ordre n, telles que $AB-BA=B$. Montrer que B est nilpotente.

Mines-MP O19-142

I) Soit $x\in[0,1]$ fixé et $f=t\mapsto t+\dfrac{1}{2}(x-t^2)$.
f est croissante sur $[0,\sqrt{x}]$, $f([0,\sqrt{x}])\subset[0,\sqrt{x}]$ et $\forall t\in[0,\sqrt{x}]$, $f(t)\geq t$ donc $(P_n(x)$ est une suite croissante, majorée par $\sqrt{x}$, donc convergente, et sa limite est l'unique point fixe de f dans $[0,\sqrt{x}]$, ie $\sqrt{x}$.
Prouvons que (P_n) converge uniformément sur $[0,1]$ de limite $l=x\mapsto\sqrt{x}$.
On sait déjà que $\forall(x,n)$, $0\leq l(x)-P_n(x)$. On cherche a,b dépendant (éventuellement) de x, mais pas de n, tels que $\forall n\in\mathbb{N}$, $(\Pi_n):\forall x\in[0,1]$, $l(x)-P_n(x)\leq\dfrac{a}{n+b}$.

(Π_0) si et seulement si $\forall x\in[0,1],\ \sqrt{x}\le\frac{a}{b}$.
(Π_n) est héréditaire ssi $\forall n\ge 0,\ (\Pi_n)\Rightarrow \forall x,\ l(x)-P_{n+1}(x)\le\frac{a}{n+1+b}$.
Supposons (Π_n) et $x\in[0,1]$.
$l(x)-P_{n+1}(x)=(l(x)-P_n(x)(1-\frac{1}{2}(P_n(x)+l(x)))\le(l(x)-P_n(x)(1-\frac{1}{2}l(x))\le\frac{a(1-\frac{1}{2}l(x))}{n+b}$.
Pour que (Π_n) soit héréditaire, il suffit donc que $\forall(x,n),\ \frac{a(1-\frac{1}{2}l(x))}{n+b}\le\frac{a}{n+1+b}$ soit $\forall(x,n),\ \frac{2}{l(x)}-b-1\le n$ et $b>0$.
Pour $b=\frac{2}{l(x)}-1=\frac{2}{\sqrt{x}}-1$ et $a=b\sqrt{x}=2-\sqrt{x}$, on a donc $\forall n\in\mathbb{N},\ (\Pi_n)$. De plus $\forall x,\ b\ge -1$ et $a\le 2$ donc $\forall n\ge 2,\ \|l-P_n\|_\infty^{[0,1]}\le\frac{2}{n-1}$ ce qui prouve la convergence uniforme de (P_n) vers l sur $[0,1]$.
NB : On peut en déduire que la suite de terme général $Q_n(X)=P_n(X^2)$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $x\mapsto|x|$; par changement de variable affine et combinaison linéaire de fonctions, que toute fonction affine par morceaux et continue est limite uniforme d'une suite de polynômes, puis le thm de Weierstrass.

II) Soit $(\Pi_k) : AB^k-B^kA=kB^k$.
(Π_0) et (Π_k) est héréditaire ; en effet, si (Π_k) pour un $k\ge 0$, alors $AB^{k+1}-B^{k+1}A=(B^kA+kB^k)B-B^{k+1}A=B^k(AB+kB-BA)$ d'où (Π_{k+1}).
$\phi : M\mapsto AM-MA$ définit un endomorphisme de l'espace $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
Supposons que $\forall k\in N,\ B^k\ne 0$; alors B^k est, pour tout $k\in\mathbb{N}$ un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre k, ce qui est absurde puisque $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est de dimension finie. B est donc nilpotente.
Rappel : B étant nilpotente, B admet pour unique valeur propre 0, donc $\chi_B=(-X)^n$, et $B^n=0$ (thm de Cayley-Hamilton) : l'ordre de nilpotence est au plus n.

13. I) Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient a_{ij} défini par $a_{ij}=1$ si $j\le i$, et $a_{ij}=0$ sinon. Calculer A^k pour $k\in\mathbb{N}$.

II) Soit f continue et de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$.

Montrer que $g(x)=o(\frac{1}{\sqrt{x}})$ au voisinage de 0.
Montrer que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Montrer que fg l'est aussi et que $\int_0^{+\infty} g^2(t)\ \mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$.

Mines-MP O19-143

I) Soit $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient b_{ij} défini par $b_{i+1,i}=1$ pour $i=1..n-1$ et sinon $b_{ij}=0$.
$A=I_n+B+B^2+...+B^{n-1}$ et $B^n=0$ donc $(I_n-B)A=I_n$ ie $A=(I-B)^{-1}$ et on cherche $(I_n-B)^{-k}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.
On sait que $(I_n-B)^{-k}\in\mathbb{R}[B]$.
Pour $t\in\mathbb{R},\ (1-t)^k(H_k(t)+o_{t\to 0}(t^{n-1}))=1$ si $H_k(t)$ est la partie régulière du DL en 0 à l'ordre $n-1$ de $(1-t)^{-k}$:
$$H_k(t)=1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-k)(-k-1)...(-k-i+1}{i!}t^i=1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^i(k+i-1)!}{i!(k-1)!}t^i=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{k+i-1}{i}(-1)^it^i.$$
Pour $t\in\mathbb{R}$, on a donc $(1-t)^kH_k(t)-1=o_{t\to 0}(t^{n-1})$ or $t\mapsto(1-t)^kH_k(t)-1$ est une fonction polynôme, donc le polynôme $(1-X)^kH_k(X)-1$ doit être multiple de X^n, et en passant dans $\mathbb{R}[B]$, $(I_n-B)^kH_k(B)-I_n$ est dans $B^n.\mathbb{R}[B]$ donc c'est la matrice nulle.
On a donc $A^{-k}=H_k(B)=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{k+i-1}{i}(-1)^iB^i$.

II) On suppose que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $x>0$. f et 1 sont dans $L^2(]0,x])$ donc $|\int_0^x f.1|\le\left(\int_0^x 1.\int_0^x f^2\right)^{1/2}$ (inégalité de Cauchy-Schwarz).
f est $L^2(]0,1])$ donc $\lim_{x\to 0}\int_0^x f^2=0$ et $\int_0^x f=o_{x\to 0}(\sqrt{x})$ et $g(x)=o_{x\to 0}(1/\sqrt{x})$.
f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h : x\mapsto\int_0^x f$ est une primitive de f, donc on peut intégrer g^2 par partie :

Soit $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$ *;* $\displaystyle\int_a^b g^2=\left[\frac{-1}{x}h^2(x)\right]_a^b-\int_a^b\frac{-1}{x}2h(x)f(x)\ dx=ag^2(a)-bg^2(b)+2\int_a^b g(x)f(x)\ dx.$

Soit $A=\sqrt{\displaystyle\int_a^b g^2}$. $A\geq 0,\ A^2\leq ag^2(a)+2A\sqrt{\displaystyle\int_a^b f^2}$ *d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur un segment, donc* $A^2\leq ag^2(a)+2A\sqrt{\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2}$.

Notons $B=\sqrt{\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2}$. *On a alors* $0\leq A\leq A_2$ *où* A_2 *est la racine positive de* $X^2-2XB-ag^2(a)$ *ie* $0\leq A\leq B+\sqrt{B^2+ag^2(a)}$.

$\displaystyle\lim_{a\to 0} ag^2(a)=0$ *donc, pour tout* b *fixé,* $a\mapsto\displaystyle\int_a^b g^2$ *est une fonction bornée, donc* g^2 *est intégrable sur* $]0,b]$ *et* $\displaystyle\int_0^b g^2\leq(B+\sqrt{B^2+0})^2=4B^2$.

$b\mapsto\displaystyle\int_0^b g^2$ *est donc aussi bornée, donc* g^2 *est* $L^1(]0,+\infty[)$ *(et* $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2\leq 4B^2=4\int_0^{+\infty} f^2$*).*

f *et* g *sont* $L^2(\mathbb{R}_+^*)$ *donc* fg *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et dans l'intégration par partie, par passage à la limite quand* $a\to 0$*, on obtient :*

$\displaystyle\int_0^b g^2=-bg^2(b)+2\int_0^b g(x)f(x)\ dx.$

Les deux intégrales ont des limites quand $b\to+\infty$ *donc* $bg^2(b)$ *a une limite* $l\in\mathbb{R}_+$ *quand* $b\to+\infty$.

Si $l\neq 0$*, alors* $g^2(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{l}{t}$ *et* $g^2\notin L^1([1,+\infty[)$*, ce qui est absurde, donc* $l=0$ *et par passage à la limite quand* $b\to+\infty$*, on obtient* $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2=2\int_0^{+\infty} fg.$

14. I) Soient $a\in\mathbb{R}$, $c\in[-1,1]$ et f dérivable sur $\mathbb{R}$.
On considère l'équation $f'(x)=f(cx)$ avec $f(0)=a$.
Résoudre l'équation dans les cas $c=1$ et $c=-1$.
On suppose $-1<c<1$; trouver les solutions f_c en développant f en série entière. En déduire la solution pour $c\neq 0$.

II) Soit A une matrice symétrique réelle et U une matrice orthogonale de même taille. Comparer $\mathrm{tr}(AU)$ et $\mathrm{tr}(UA)$ à $\mathrm{tr}A$.

III) Cours : Quelles sont les valeurs propres d'une matrice orthogonale.

Mines-MP O19-144

I) *Notons* $(E_c):(f'(x)=f(cx)$ *et* $f(0)=a)$.
Cas $c=1$ *:*
Analyse : $f'=f$ *a pour solution générale* $f=x\mapsto Ke^x$.
Synthèse : $f=x\mapsto Ke^x$ *est solution de* (E_1) *ssi* $K=a$.
La solution (unique) de (E_1) *est* $x\mapsto ae^x$.
Cas $c=-1$ *:*
Analyse : $f"(x)=-f'(-x)=-f(x)$ *et la solution générale de* $y"=-y$ *est* $x\mapsto K_1\cos x+K_2\sin x$.
Synthèse : $x\mapsto K_1\cos x+K_2\sin x$ *est solution de* (E_{-1}) *ssi* $\forall x,\ -K_1\sin x+K_2\cos x=K_1\cos x-K_2\sin x$ *et* $K_1=a$ *donc* $x\mapsto a(\cos x+\sin x)$ *est la solution (unique) de* (E_{-1}).
Cas $-1<c<1$ *:*
Prouvons que f *est nécessairement développable en série entière.*
Par récurrence immédiate, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f\in\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ *et* $\forall t,\ f^n(t)=c^{n-1}f(c^nt)$.
Soit $x>0$. f *est continue donc bornée sur le segment* $[-x,x]$ *; notons* M *un majorant de* $|f|$ *sur* $[-x,x]$.
$|c|<1$ *donc* $\forall n,\ [-|c|^nx,|c|^nx]\subset[-x,x]$ *et pour tout* $n\geq 1$, f^n *est bornée sur* $[-x,x]$ *et* $|c|^{n-1}M$ *majore* $|f^n|$ *sur* $[-x,x]$.
Le reste de Taylor $R_n(x)=f(x)-\displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{f^k(0)x^k}{k!}=\int_0^x f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ dt$ *vérifie donc* $|R_n(x)|\leq\dfrac{|c|^nMx^{n+1}}{(n+1)!}$
donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0$ *et* f *est développable en série entière sur* $\mathbb{R}_+$. *De même avec* $x<0$ *donc* f *admet un développement en série entière sur* $\mathbb{R}$.
On a aussi trouvé que $\forall n\geq 1,\ f^n(0)=c^{n-1}f(0)$ *donc le dévelopement de* f *est :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c^{n-1} f(0) x^n}{n!} = a(1 + \frac{1}{c}(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(cx)^n}{n!} - 1)) = a(1 + \frac{1}{c}(e^{cx} - 1))\ si\ c \neq 0.$$

II) $tr(AU) = tr(UA)$.
A est diagonalisable par une matrice orthogonale ; soit $P \in O_n$ *et* $D = diag(d_1, ..., d_n)$ *telles que* $A = PD^tP$.
$tr(AU) = tr(PD^tPU) = tr(D^tPUP) = tr(DV) = \sum_{k=1}^{n} d_i v_{ii}$. *V est orthogonale donc* $\forall i,\ |v_{ii}| \leq 1$ *et* $(d_1, ..., d_n)$ *est le spectre de A, donc si A est positive,* $|tr(AU)| \leq tr(A)$.

15. I) Soit l'équation différentielle $a\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, où a, b, c sont non tous nuls et f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On effectue le changement de variable $u = x + \alpha y$, $v = x + \beta y$ avec $\alpha \neq \beta$. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par u et v.
Montrer que, suivant les valeurs de a, b et c, on peut se ramener à $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$.

II) On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, de coefficient a_{ij} est à damiers si, pour $i + j$ impair $a_{ij} = 0$.
Si A est à damiers et inversible, A^{-1} est-elle à damiers ?

Mines-MP O19-145

I) *Soit* $\theta = (x, y) \mapsto (u, v) = (x + \alpha y, x + \beta y)$. *Puisque on suppose* $\alpha \neq \beta$, *ce changement de variable est linéaire et bijectif, donc c'est un* $\mathcal{C}^1-$*difféomorphisme de* $\mathbb{R}^2$.
Soit $g = f \circ \theta^{-1}$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\beta^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \alpha\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (\alpha+\beta)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \beta\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

L'équation donnée équivaut à $(E) :\ (a+b\alpha+c\alpha^2)\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (2a+b(\alpha+\beta)+2c\alpha\beta)\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + (a+b\beta+c\beta^2)\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.

$1er$ *cas :* $b^2 - 4ac > 0$.
On choisit pour α, β *les racines (réelles distinctes) de* $cX^2 + bX + a$.
(E) *devient :*

$$(2a+b(-b/c)+2c(a/c))\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{4ac - b^2}{c}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$$ *donc la solution générale est* $g = (u, v) \mapsto A(u) + B(v)$ *où* $(A, B) \in (\mathcal{C}^2(\mathbb{R}))^2$ *(et* $f = g \circ \theta$ *pour l'équation donnée).*

2*ème cas :* $b^2 - 4ac = 0$.
On choisit pour α *la racine double de* $cX^2 + bX + a$, *ie* $\alpha = -\dfrac{b}{2c}$. (E) *devient :*

$$(2a + b(-\frac{b}{2c} + \beta) - b\beta)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + (a + b\beta + c\beta^2)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = (a + b\beta + c\beta^2)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0.$$

On choisit pour β *un réelle quelconque distinct de* α. *La solution générale est* $g = (u, v) \mapsto vA(u) + B(u)$ *où* $(A, B) \in (\mathcal{C}^2(\mathbb{R}))^2$ *(et* $f = g \circ \theta$ *pour l'équation donnée).*

3*ème cas :* $b^2 - 4ac < 0$.

On cherche α, β *pour que* $(\Sigma) : \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ a + b\alpha + c\alpha^2 = a + b\beta + c\beta^2 \\ 2a + b(\alpha + \beta) + 2c\alpha\beta = 0 \end{cases}$

$$(\Sigma) \iff \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \alpha + \beta = -b/c \\ \alpha\beta = \dfrac{b^2 - 2ac}{2c^2} \end{cases} \iff \alpha, \beta \text{ sont les 2 racines distinctes du trinôme } Z^2 + \frac{b}{c}Z + \frac{b^2 - 2ac}{2c^2}.$$

Son discriminant est $\dfrac{4ac - b^2}{c^2} > 0$ *d'où l'existence de* α, β.
(E) *devient :*
$\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$ *donc la solution générale est g harmonique.*

II) *Soit* $(e_1, ..., e_n)$ *la base usuelle de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *et* $E_1 = Vect((e_{2k})_{0 \leq 2k \leq n}), E_2 = Vect((e_{2k+1})_{0 \leq 2k+1 \leq n})$.
A est à damiers ssi $AE_1 \subset E_2$ *et* $AE_2 \subset E_1$.
Si A est inversible, il est nécessaire que $\dim AE_1 = \dim E_1$ *donc que* $\dim E_2 = \dim E_1$ *ie que n soit pair. On suppose désormais que* $n = 2p, p \in \mathbb{N}^*$.
Alors, si A est inversible, $AE_1 \subset E_2 \Rightarrow E_1 \subset A^{-1}E_2$ *et* $AE_2 \subset E_1 \Rightarrow E_2 \subset A^{-1}E_1$ *et les inclusions sont des égalités puisque* $E_1, E_2, A^{-1}E_1, A^{-1}E_2$ *sont tous de dimension p, donc si A est à damiers, alors* A^{-1} *est à damiers.*

16. I) Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. A quelle condition, nécessaire et suffisante, $N_A(P) = \sup_{x\in A} |P(x)|$ est-elle une norme sur $\mathbb{R}[X]$?
On suppose que c'est le cas et on note λ l'application qui, à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe $\lambda(P) = P(0)$. Donner une CNS pour que λ soit continue.

II) Soit f un endomorphisme de E euclidien tel que $\ker f = \mathrm{Im} f$. Montrer que $f + f^*$ est un automorphisme.

Mines-MP O19-146

I) Prouvons que N_A est une norme ssi A est borné et infini :
Supposons que A ne soit pas borné ; alors $N_A(P)$ n'existe pas si $P = X$.
Supposons que $A = \{a_1, ..., a_n\}$ est fini ; alors $N_A(P) = 0$ bien que $P \neq 0$ si $P = \prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$.
La condition est donc nécessaire.
Supposons A borné et infini.
Tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est borné sur tout segment donc sur A et $N_A(P)$ existe.
$\forall (P, Q, \alpha) \in (\mathbb{R}[X])^2 \times \mathbb{R},\ N_A(\alpha P) = |\alpha| N_A(P)$ *et* $N_A(P+Q) \leq N_A(P) + N_A(Q)$.
$\forall P,\ N_A(P) \geq 0$ *et* $N_A(P) = 0 \Rightarrow P$ *admet une infinité de racines* $\Rightarrow P = 0$,
donc N_A est une norme : la condition est suffisante.
Prouvons que λ est continue ssi 0 est adhérent à A :
Supposons que $0 \in \overline{A}$; il existe une suite (u_n) à termes dans A telle que $0 = \lim u_n$. Soit $P \in B(0,1)$; $\forall n,\ P(u_n) < 1$ et $\lambda(P) = \lim P(u_n)$ (continuité de P en 0) donc $|\lambda(P)| \leq 1$. λ est linéaire et bornée sur la boule unité donc continue.
Supposons que $0 \notin \overline{A}$; il existe $a > 0$ tel que $A \cap]-a, a[= \emptyset$ et donc $b > a$ tel que $A \subset [-b, -a] \cup [a, b]$.
Soit h_n affine par morceaux et continue de $[-b, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $h_n(0) = n$ et $h_n(t) = 1/2$ si $t \in [-b, -a] \cup [a, b]$; d'après le thm de Stone-Weierstrass, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|h_n - P_n\|_\infty^{[-b,b]} \leq 1/2$.
$\forall t \in A,\ P_n(t) \in [0, 1]$ donc $P_n \in \overline{B}(0, 1)$; $\forall n,\ \lambda(P_n) = P_n(0) \geq h_n(0) - 1/2 = n - 1/2$: λ n'est pas bornée sur la boule unité (fermée) donc n'est pas continue.

II) Soit x tel que $f(x) + f^*(x) = 0$. Prouvons que $x = 0$.
$y = f(x) = f^*(-x) \in Im(f) \cap Imf^*$ *or* $Imf^* = (\ker f)^\perp = (Imf)^\perp$ *donc* $y = 0$.
$f(x) = f^*(-x) = 0$ *donc* $x \in \ker f \cap \ker f^*$ *or* $\ker f^* = (Imf)^\perp = (\ker f)^\perp$ *donc* $x = 0$.

17. I) Déterminer les extrema de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et donner leur nature.

II) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A - I_n = 0$. Montrer que $\det A \geq 0$.

III) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que les valeurs propres de A sont imaginaires pures.

IV) Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

Mines-MP O19-147

I) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$; la jacobienne en $M = (x, y)$ est $4(x^3 - x + y, y^3 + x - y)$ et la hessienne $H_M = 4\begin{pmatrix} 3x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 - 1 \end{pmatrix}$.
Les points critiques sont les solutions de $x - y = x^3 = -y^3$ d'où :
$A = (0, 0), B = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), C = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.
$H_B = H_C$ est de trace 40 et de déterminant 384 donc elle est définie positive et f admet en B et C des minima locaux.
H_A n'est pas inversible ; $f(A) = 0$, $\forall x,\ f(x, x) \geq 0$ et $f(-x, x) = 2x^2(x^2 - 4) \leq 0$ si $|x| \leq 2$ donc f n'admet en A ni un maximum ni un minimum.
Voyons si $f(B) = f(C) = -8$ est un minimum global.
En polaires, $f(x, y) = \rho^4(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta) - 2\rho^2(1 - \sin 2\theta) \geq \rho^4/2 - 2\rho^2 \to +\infty$ quand $\rho \to +\infty$ donc il existe $R > 0$ tel que $\forall M \notin B(0, R),\ f(M) > 0$.
f est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc bornée sur le compact $K = \overline{B}(0, R)$ et la restriction de f à K atteint son minimum $m = f(D) \leq -8$ en un point $D \in K$. Mais $\forall M \notin K,\ f(M) \geq m$ donc m est aussi le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$, et f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc ce minimum est atteint en un point critique, donc en B et en C.

II) $P = X^3 - X - 1$ est annulateur de A et $h : t \mapsto t^3 - t - 1$ est strictement croissante sur $]-\infty, -\sqrt{3}/3]$, strictement décroissante sur $[-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$, strictement croissante sur $[-\sqrt{3}/3, +\infty[$ et $h(-\sqrt{3}/3) < 0$ donc P admet une racine réelle $\alpha \in [-\sqrt{3}/3, +\infty[$ et 2 racines complexes conjuguées $\beta, \overline{\beta}$.
$sp(A) \subset \{\alpha, \beta, \overline{\beta}\}$ ie $\alpha, \beta, \overline{\beta}$ sont les valeurs propres de A d'ordre n_1, n_2, n_3 avec $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$ et $n_2 = n_3$ puisque A est réelle.
$\det A = \alpha^{n_1}(\beta\overline{\beta})^{n_2}$ *donc* $\det A > 0$.

III) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.
$AV = \lambda V$ donc $A\overline{V} = \overline{\lambda V}$ puisque A est réelle, donc $\overline{\lambda}\,{}^t\overline{V}V = {}^t\,\overline{V}^t AV = {}^t\,\overline{V}(-AV) = -\lambda{}^t\overline{V}V$, or ${}^t\overline{V}V = \sum_{k=1}^{n} |v_k|^2 > 0$ donc $\overline{\lambda} = -\lambda$.

IV) 1er cas : $B = 0$. Alors tout vecteur propre de A est vecteur propre de B.
2ème cas : $B \neq 0$. Alors ImB est un sous-espace de dimension au moins 1 stable par B donc il contient au moins un vecteur propre v de B ; mais $v \in B \subset \ker A$ donc v est aussi vecteur propre de A (associé à 0).

18. I) Donner la limite de la suite de terme général $A_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{1/n}$.

Même question pour la suite de terme général $B_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

II) Quel est le rang de la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^n$ par $q(X) = \displaystyle\sum_{i \neq j} x_i x_j$?

Soit $E = \{X \in \mathbb{R}^n, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \text{ et } \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \geq 0\}$. Déterminer $\displaystyle\sup_{X \in E} q(X)$.

Mines-MP O19-148

I) $\ln A_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1+k/n)$: on reconnaît une somme de Riemann sur le segment $[0,1]$ de la fonction continue $t \mapsto \ln(1+t)$, d'où la convergence de la suite $(\ln A_n)$ vers $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)\ dt = 2\ln 2 - 1$ et la convergence de (A_n) vers $4/e$.
$h : t \mapsto \ln(1+t)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $]-1, +\infty[$ donc pour $t \geq 0$, $\ln(1+t) = t + R_t$ où $|R_t| \leq \dfrac{t^2 M_2}{2!}$, M_2 étant un majorant de $|h"|$ sur $[0,t]$ (inégalité de Taylor).
On peut choisir $M_2 = 1$ et il vient : $\ln B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} + R_{k/n^2} = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^2}T_n$ avec $|T_n| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^4} = \frac{n(n+1)(2n+1)/6}{2n^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n}$ donc $\lim \ln B_n = 1/2$ et $\lim B_n = \sqrt{e}$.

II) La matrice de q dans la base usuelle est Q de terme général $q_{i,j} = 1$ si $i \neq j$, $q_{i,i} = 0$.
$(Q + I_n)^2 = n(Q + I_n)$ donc $Q^2 - (n-2)Q = (n-1)I_n$ donc si $n \neq 1$, alors Q est inversible (donc de rang n) : son inverse est $\dfrac{1}{n-1}(Q - (n-2)I_n)$.
Si $X \in E$, alors $q(X) = (x_1 + ... + x_n)^2 - (x_1^2 + ... + x_n^2) = 1 - N(X)^2$, N désignant la norme euclidienne usuelle. On cherche donc $M = \displaystyle\sup_{X \in E}(1 - N^2(X)) = 1 - \inf_{X \in E}(N^2(X)) = 1 - d^2(0, E)$, ce qui assure l'existence de M.
E est inclus dans l'hyperplan affine passant par $A = (1/n, ..., 1/n)$ de vecteur normal $u = (1, 1, ..., 1)$ et $\forall X \in E$, $X = A + v$ avec $v \perp u$ donc $v \perp A$ et $N^2(X) = N^2(A) + N^2(v) \geq N^2(A)$ d'où $d(0, E) = N(A) = \sqrt{n}/n$ et $M = 1 - 1/n = \dfrac{n-1}{n}$.

19. I) Soit des entiers $n \geq 2$ et k tels que $1 \leq k \leq n-1$; décomposer en cycles la permutation de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui à $\overline{m}$ associe $\overline{m+k}$.

II) Déterminer l'ensemble des $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $2p + 3q$ soit multiple de 7.

Mines-MP O19-149

I) Soit p la permutation étudiée.
Supposons que $k \wedge n = 1$. $\forall x \in [\![0, n-1]\!]$, $\exists (a,b) \in \mathbb{N}^2$, $x = ak + bn = ak\ mod(n)$ donc $\forall x \in [\![0, n-1]\!]$, $\exists a \in \mathbb{N}$, $\overline{x} = p^a(\overline{0})$: p est un cycle.
Plus généralement, soit $d = k \wedge n$.
$\overline{y}$ est dans l'orbite de $\overline{x}$ sous p ssi $\exists a \in \mathbb{N}$, $y = x + ak\ mod(n)$ ie $\exists (a,b) \in \mathbb{N}^2$, $y - x = ak + bn$.
$k\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ donc $\overline{y}$ est dans l'orbite de $\overline{x}$ sous $p \iff y - x = 0\ mod(d)$: p est donc la composée de d cycles de longueur n/d de la forme $(\overline{x}, p(\overline{x}), ..., p^{n/d-1}(\overline{x}))$ pour $x = 0..d-1$.

II) $2 \wedge 3 = 1$ donc $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ et l'équation donnée a toujours des solutions.
Soit $n \in \mathbb{Z}$. $(4n, n)$ est une solution de $2p + 3q = 7n$.
(p, q) est une autre solution $\iff 2(p - 4n) = 3(n - q) \iff 2|n - q$ ie $q = n + 2m$, $m \in \mathbb{Z}$ et $p - 4n = -3m$ (thm de Gauss) donc la solution générale de $2p+3q = 0\ mod(7)$ est $(4n-3m, n+2m)$, $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$.

20. I) Soit E un espace vectoriel normé, U et V deux parties de E.
A-t-on toujours $\overline{U \cap V} = \overline{U} \cap \overline{V}$? Et si, de plus, U est ouvert ?
Montrer que si U est ouvert et que U et V sont denses dans E, alors $U \cap V$ est dense dans E.

II) Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, on considère la conique C_m d'équation cartésienne $X^2+Y^2+(mX+1)(Y-X) = 0$. Déterminer la valeur du rayon de courbure de C_m à l'origine, lorsque cela a un sens ; discuter le genre de C_m ; par quels points du plan passe-t-il une infinité de coniques de la famille ?

III) Soient deux entiers naturels p et q et H une matrice réelle de taille (p, q) et de rang q ; si $p > q$, comment construire une matrice $J \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ telle que ${}^tJJ = {}^t HH$? Montrer que toutes les matrices J satisfaisant cela sont inversibles.

Mines-MP O19-150

I) Soit $U =]0, 1[$ et $V =]1, 2[$ dans $\mathbb{R}$. $\overline{U \cap V} = \emptyset$ et $\overline{U} \cap \overline{V} = \{1\}$ donc l'égalité proposée n'est pas toujours vraie, même si U et V sont ouverts.
Supposons U ouvert et dense, V dense, et soit $x \in E$, $\varepsilon > 0$. Prouvons que $B(x, \varepsilon)$ (notée B) coupe $U \cap V$.
U est dense donc il existe $a \in U$ tel que $a \in B$, et U est ouvert, donc il existe $\rho > 0$ tel que $B(a, \rho) \subset U$.
Soit $r = \min(\rho, \varepsilon - N(a - x))$. $B(a, r) \subset U$ et $B(a, r) \subset B$.
V est dense donc il existe $(z_n) \in V^{\mathbb{N}}$ de limite a. Pour $n \geq n_0$, $N(a-z_n) < r$. Alors $z_{n_0} \in V \cap B(a, r)$ donc $z_{n_0} \in (U \cap V) \cap B$.

II) Soit $f = (X, Y) \mapsto X^2 + Y^2 + (mX + 1)(Y - X)$.
$f(0, 0) = 0$ et $\mathrm{grad}\, f(0, 0) = (-1, 1)$ donc l'origine O est un point de la conique et la tangente en ce point est la droite de direction $(1, 1)$.
La matrice $P = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ définit le passage vers le repère orthonormé (O, T, N) où (T, N) est un repère de Frenet en O. Le développement de Taylor donne alors $M(s) = sT + (Rs^2/2)N + o(s^2)$ donc $R = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{2y_1}{x_1^2}$.
L'équation de C_m dans ce nouveau repère est :
$x_1^2+y_1^2 = (m(x_1-y_1)+\sqrt{2})(2y_1)/2 = 0$ *ie* $1+(1-m)y_1\dfrac{y_1}{x_1^2}+mx_1\dfrac{y_1}{x_1^2}+\dfrac{y_1}{x_1^2}\sqrt{2} = 0$ *donc* $1+\dfrac{R}{2}\sqrt{2} = 0$ *en passant à la limite donc $R = -\sqrt{2}$.*
La matrice associée à la partie quadratique de f est $Q = \begin{pmatrix}1-m & m/2\\ m/2 & 1\end{pmatrix}$.
$\det Q = 1 - m - m^2/4 = 0 \iff m = 2(\pm\sqrt{2} - 1)$ *donc si $m = m_1 = 2(\sqrt{2} - 1)$ ou $m = m_2 = 2(-\sqrt{2} - 1)$, alors C_m est une parabole, éventuellement dégénérée en deux droites parallèles.*
Si $m \in]m_2, m_1[$, Q a deux valeurs propres non nulles de signes différents, donc C_m est une hyperbole.
Si $m \notin [m_2, m_1]$, Q a deux valeurs propres de même signe, et C_m n'est pas vide (O est sur C_m) donc C_m est une ellipse.
Les points communs à toutes les C_m sont les solutions du système $\begin{cases} X^2 + Y^2 + Y - X = 0\\ X(Y - X) = 0\end{cases}$ *ie les points O et $A = (-1, 0)$; O est "point double" : toutes les C_m ont en O la même tangente.*

(a) La matrice H est congruente à $H_1 = \begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\\ & (0) & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_q\\ 0_{p-q,q}\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ *: il existe $P \in GL_p(\mathbb{R})$ et $Q \in GL_q(\mathbb{R})$ tels que $H = PH_1Q$.*
${}^tHH = {}^t Q {}^tH_1 {}^tPPH_1Q$ et $B = {}^t H_1 {}^tPPH_1$ est une matrice carrée symétrique réelle positive de taille (q, q). En effet, ${}^tXBX = \|PH_1X\|_2^2$, $\|.\|_2$ désignant la norme euclidienne usuelle sur $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Il existe donc une matrice carrée symétrique réelle positive de taille (q, q), C, telle que $C^2 = B$ et alors ${}^tHH = {}^t QC^2Q = {}^t (CQ)(CQ)$ donc $J = CQ$ est une solution du problème.
Si M est une matrice quelconque de taille (i, j), $rgM = rg({}^tMM)$; en effet :
Soit $N = {}^t MM$. $\ker M \subset \ker N$.
De plus $\forall X \in \mathscr{M}_{i,1}(\mathbb{R})$, $NX = 0 \Rightarrow {}^t XNX = {}^t (MX)(MX) = \|MX\|_2^2 = 0 \Rightarrow MX = 0$ donc $\ker N \subset \ker M$.
On en déduit : $rgJ = rg({}^tJJ) = rg({}^tHH) = rgH$ donc toutes les solutions J sont de rang q ie inversibles.

21. I) $M=(m_{ij})$, matrice complexe dont les seuls coefficients non nuls sont les $m_{n-i+1,i}$, est-elle diagonalisable ? Même question lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$.

II) Soit (u_n) une suite strictement positive telle que $\dfrac{u_{n+2}}{u_n+u_{n+1}}$ admette une limite distincte de $\dfrac{1}{2}$; étudier la nature de la série $\sum u_n$.

III) Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\|f(y)-f(x)\| \geq \|y-x\|$ pour tout (x,y).
Montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur un ouvert Ω.
Montrer que Ω est aussi fermé ; que peut-on en conclure ?

Mines-MP O19-151

I) Si $n=2p, p\in\mathbb{N}^*$ est pair, alors
$M^2=N=diag(m_{1,n}m_{n,1},...,m_{p,p+1}m_{p+1,p},m_{p+1,p}m_{p,p+1},...,m_{n,1}m_{1,n})$;
$N=diag(m_{k,2p+1-k}m_{2p+1-k,k},k=1..2p)$.
Si $n=2p-1, p\in\mathbb{N}^*$ est impair, alors
$M^2=N=diag(m_{1,n}m_{n,1},...,m_{p-1,p+1}m_{p+1,p-1},m_{p,p}^2,m_{p+1,p-1}m_{p-1,p+1},...,m_{n,1}m_{1,n})$;
$N=diag(m_{k,2p-k}m_{2p-k,k},k=1..2p-1)$.

Dans les 2 cas, N est diagonal(isabl)e et $\det N=\prod_{i=1}^{n} m_{n+1-i,i}^2 \neq 0$ donc M est inversible. Prouvons que toute matrice M complexe inversible de carré N diagonalisable(dans $\mathbb{C}$) est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$) :

N admet un polynôme annulateur scindé à racines simples $P(X)=\prod_{i=1}^{d}(X-\alpha_i)$; $A=\prod_{i=1}^{d}(M^2-\alpha_i I_n)=0$ et M^2 est régulière donc s'il existe $i\in [\![1,d]\!]$ tel que $\alpha_i=0$, alors $A.M^{-2}=0$ donc on se ramène au cas où $\forall i\in [\![1,d]\!]$, $\alpha_i\neq 0$.
Dans $\mathbb{C}$, chaque α_i admet 2 racines $\beta_i,-\beta_i$ distinctes et $\beta_i=\pm\beta_j \Rightarrow \alpha_i=\alpha_j \Rightarrow i=j$ donc $A=\prod_{i=1}^{d}(M-\beta_i I_n)(M+\beta_i I_n)=0$ prouve que M admet un polynôme annulateur $\prod_{i=1}^{d}(X-\beta_i)(X+\beta_i)$ qui est scindé à racines simples, donc M est diagonalisable.
Sur $\mathbb{R}$, M n'est pas toujours diagonalisable : par ex., pour $n=2, m_{2,1}=-1, m_{1,2}=1$, $sp_{\mathbb{C}}(M)=\{-i,i\}$.

II) Soit $l=\lim \dfrac{u_{n+2}}{u_n+u_{n+1}}$.
Cas $l>1/2$:
Soit $\alpha\in]1/2,l[$ et n_0 tel que $\forall n\geq n_0$, $\dfrac{u_{n+2}}{u_n+u_{n+1}}\geq\alpha$.
On a $\forall n\geq n_0$, $u_{n+2}\geq\alpha(u_n+u_{n+1})$.
Soit la suite (v_n) définie par : $\forall n\leq n_0+1$, $v_n=u_n$, $\forall n\geq n_0$, $v_{n+2}=\alpha(v_n+v_{n+1})$.
Par récurrence immédiate, (1) : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq v_n$.
On peut calculer le terme général de (v_n) :
$P(r)=r^2-\alpha r-\alpha$ admet 2 racines réelles distinctes $r_1<0<r_2$ et $P(1)=1-2\alpha<0$ donc $r_2>1$ et $P(-1)=1$ donc $r_1\in]-1,0[$.
Il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall n$, $v_n=Ar_1^n+Br_2^n$.
(v_n) est à termes dans $\mathbb{R}_+$ par récurrence immédiate, et si $B=0$, alors $v_n\sim Ar_1^n$ qui est le terme général d'une série alternée, donc nécessairement $B\neq 0$ et $v_n\sim Br_2^n$ (et $B>0$). $\sum r_2^n$ est une série géométrique divergente, donc $\sum v_n$ est divergente et d'après (1), $\sum u_n$ est divergente.
Cas $l<1/2$:
De même, on peut définir une suite (v_n) telle que $\forall n$, $u_n\leq v_n$ et $v_n=Ar_1^n+Br_2^n$ où r_1,r_2 sont les racines de $P(r)=r^2-\alpha r-\alpha$ avec $l<\alpha<1/2$.
Ici, $P(1)>0$ donc $-1<r_1<0<r_2<1$ donc $\sum r_1^n$ et $\sum r_2^n$ sont convergentes et $\sum v_n$, $\sum u_n$ sont elles aussi convergentes.

III) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^{2n}$, $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$: (1) : f est injectif.
Prouvons que (2) : $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $df_x\in GL(\mathbb{R}^n)$:
Soit $x\in\mathbb{R}^n$ et $h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. $f(x+h)=f(x)+\ df_x(h)+o(h)$
donc $N(\ df_x(h))=N(f(x+h)-f(x)-o(h))\geq N(f(x+h)-f(x))-N(o(h))$.
$\forall h\neq 0$, $\dfrac{N(\ df_x(h))}{N(h)}\geq 1-\dfrac{N(o(h))}{N(h)}$ et $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{N(o(h))}{N(h)}=0$ donc $\sup\limits_{h\neq 0}\dfrac{N(\ df_x(h))}{N(h)}\geq 1$: la norme N' de df_x subordonnée à une norme N sur $\mathbb{R}^n$ vérifie $N'(\ df_x)\geq 1$ donc df_x est inversible.
D'après (1) et (2), f induit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

Prouvons que $U = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ *est ouvert :*
Soit $a \in U$ *et* $g = x \in \mathbb{R}^n \mapsto N(f(x) - a)$.
g *est continue sur* $\mathbb{R}^n$ *et minorée (par* 0*) donc admet une borne inférieure* m. *Prouvons que* m *est un minimum.*
$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) = N(f(x) - f(0) + f(0) - a) \geq N(f(x) - f(0)) - N(f(0) - a) \geq N(x) - g(0)$.
Soit $R = 2m + g(0)$ *et* $K = \overline{B}(0, R)$.
m *minore* g *sur* K.
Soit $\varepsilon > 0$. $\exists x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) < m + \varepsilon$.
$x \notin K \Rightarrow g(x) > R - g(0) = 2m > m + \varepsilon$ *dès que* $\varepsilon < 1$ *donc* $m = \inf\limits_K g = \min\limits_K g$ *puisque* g *est continue sur* K *compact. On a donc* $m = g(b)$ *(avec* $b \in K$*) et* $f(b) \in \Omega$ *donc* $m = g(b) \neq 0$.
$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $N(f(x) - a) \geq m > 0$ *donc* $B(a, m/2) \cap \Omega = \emptyset$ *ie* $B(a, m/2) \subset U$.
"Ω *est un ouvert-fermé non vide de* $\mathbb{R}^n$ *qui est connexe donc* $\Omega = \mathbb{R}^n$*". Preuve sans connexité :*
Supposons que $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ *et soit* $b \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. $\Omega \neq \emptyset$ *: soit* $a \in \Omega$ *et* $c : t \in [0,1] \mapsto (1-t)a + tb$ *(un chemin de* a *à* b *: connexité par arc).*
$c(0) = a \in \omega$ *donc* $F = \{t \in [0,1] / c(t) \in \Omega\}$ *est majoré non vide donc admet une borne supérieure* τ.
$F = c^{-1}(\Omega)$ *est fermé dans* $[0,1]$*(*c *est continue et* Ω *est fermé) donc* $\tau \in F$.
$[0,1] \setminus F = c^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ *est fermé dans* $[0,1]$*(*c *est continue et* $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ *est fermé) et pour tout* n, $\tau + \frac{1}{n} > \tau$ *donc* $\tau + \frac{1}{n} \in [0,1] \setminus F$ *donc* $\tau = \lim(\tau + \frac{1}{n}) \in [0,1] \setminus F$ *ce qui est absurde, d'où* $\Omega = \mathbb{R}^n$.